UE DE MATHÉMATIQUES

Une méthode énergétique pour l'équation KdV

27 juillet 2020

Marc Fersztand

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

TABLE DES MATIÈRES

EXECUTIVE SUMMARY

The energetic approach can prove existence and uniqueness of solutions for the KdV equation. The goal of this report is to make this approach, developed in [1], accessible for math students who are not familiar with the field. After some preliminary concepts (Sobolev spaces [2], Unbounded operators [3]), we solve a regularized version of KdV and we then use an energetic method to transpose our results to prove existence and uniqueness of solutions for KdV.

1 INTRODUCTION

1.1 L'ÉQUATION KDV

Dans ce rapport nous étudions l'équation KdV(Korteweg-de Vries). Il s'agit d'une équation au dérivées partielles qui apparaît, par exemple, dans la description physique des vagues en eaux peu profondes [4]. Cette équation non linéaire dont on connaît une solution exacte a été extensivement étudiée et généralisée [5]. Le problème de Cauchy non linéaire correspondant est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u\frac{\partial u}{\partial x} & = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) & = u_0. \end{array} \right. \tag{1}$$

où u est une fonction suffisamment lisse à deux variables réelles.

1.2 ESPACES DE SOBOLEV

Pour préciser ce que signifie suffisamment lisse, rappelons la définition et quelques propriétés des espaces de Sobolev, comme décrit dans [2].

Définition 1.1 (espaces de Sobolev). Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}) = \mathrm{H}^s := \{u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), D^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ pour $0 \leqslant \alpha \leqslant s\}$. Muni de la norme $||u||^2_{\mathrm{H}^s} = \sum_{k=0}^{s} ||D^k u||^2_{\mathrm{L}^2}$ il forme un espace de Hilbert.
De manière alternative on peut définir $\mathrm{H}^s = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi) \in \mathrm{L}^2\}$ et le munir de la norme $||u|| = (\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}$ équivalente à $||u||_{\mathrm{H}^s}$ ce qui permet d'étendre la définition à $s \in \mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $s \in \mathbb{N}^*$

— Soit (u_n) une suite de Cauchy de H^s. Comme $|| \quad ||_{\mathrm{L}^2} \leqslant || \quad ||_{\mathrm{H}^s}$, (u_n) est aussi de Cauchy dans L^2 qui est complet. Ainsi il existe $u \in \mathrm{L}^2$ tel que $u_n \overset{\mathrm{L}^2}{\to} u$. Or par Cauchy-Schwartz, L^2 s'injecte continuement dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ainsi, $u_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} u$ et pour $0 \leqslant k \leqslant s$ on a :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty, < u_n, \phi^{(k)} > \underset{n\to\infty}{\to} < u, \phi^{(k)} >$$

i.e $u_n^{(k)} \overset{\mathcal{D}'}{\to} D^k u$. Or comme $|| \quad ^{(k)}||_{\mathrm{L}^2} \leqslant || \quad ||_{\mathrm{H}^s}$, on sait que $(u_n^{(k)})$ est convergente dans L^2.
Par unicité de la limite, $D^k u \in \mathrm{L}^2$ et $u_n^{(k)} \overset{\mathrm{L}^2}{\to} D^k u$ d'où on conclut que $u_n \overset{\mathrm{H}^s}{\to} u$ et que H^s est complet.

— Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tel que $(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi) \in \mathrm{L}^2$, on a pour $k \in \{0, \dots, s\}$

$$|(i\xi)^k \hat{u}| \leqslant \sqrt{\binom{s}{k}\xi^{2k}}|\hat{u}| \leqslant (1+\xi^2)^{s/2}|\hat{u}| \in \mathrm{L}^2.$$

On en déduit que $D^k u \in \mathrm{L}^2$ et donc que $u \in \mathrm{H}^s$. On a également que :

$$||u||_{\mathrm{H}^s}^2 = \sum_{k=0}^{s} ||(i\xi)^k \hat{u}||_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant s||(1+\xi^2)^{s/2}\hat{u}||_{\mathrm{L}^2}^2.$$

Réciproquement, si $u \in \mathrm{H}^s \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a :

$$||(1+\xi^2)^{s/2}\hat{u}||_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} ||(i\xi)^k \hat{u}||_{\mathrm{L}^2}^2 = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} ||u^{(k)}||_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant 2^s ||u||_{\mathrm{H}^s}^2.$$

Ainsi $\mathrm{H}^s = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi) \in \mathrm{L}^2\}$ et les deux normes $||u||_{\mathrm{H}^s}$ et $||(1+\xi^2)^{s/2}\hat{u}||_{\mathrm{L}^2}$ sont équivalentes.

□

Proposition 1.1 (densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans H^s). Soit $s \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(\mathrm{H}^s(\mathbb{R}), ||\quad||_{\mathrm{H}^s})$.

Démonstration. On a les inclusions suivantes $\mathcal{C}_c^\infty \underset{\text{dense}}{\hookrightarrow} \mathcal{S} \underset{\mathcal{C}^0 \text{ et dense}}{\hookrightarrow} \mathrm{H}^s$.

— Montrons la densité de $\mathcal{C}_c^\infty \hookrightarrow \mathcal{S}$.
Soit $\phi \in \mathcal{S}$, et ζ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $[0,1]$, valant 1 sur $[-1,1]$ et 0 sur $\mathbb{R} \setminus [-2,2]$.
Alors pour $M > 1$, $\phi_M : x \mapsto \zeta(\frac{x}{M})\phi(x)$ appartient à $\mathcal{C}_c^\infty$ et pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
||x^\alpha(\phi - \phi_M)^{(\beta)}||_\infty &\leqslant ||x^\alpha \phi^{(\beta)}(1-\zeta(\frac{x}{M}))||_\infty + \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} \frac{1}{M^k} ||\zeta^{(k)}(\frac{x}{M})x^\alpha \phi^{(\beta-k)}||_\infty \\
&\leqslant \sup_{x \notin [-M,M]} |x^\alpha \phi^{(\beta)}(x)| + \frac{\beta^{\beta+1}}{M} \max_{0\leqslant k\leqslant\beta} ||\zeta^{(k)}||_\infty \max_{0\leqslant k\leqslant\beta} ||x^\alpha\phi^{(k)}||_\infty \\
&\underset{M\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{car } \phi \in \mathcal{S}
\end{aligned}$$

— Montrons la continuité de $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathrm{H}^s$. Soit $\phi_n \to 0$ dans $\mathcal{S}$. On a

$$||\phi_n||_{\mathrm{H}^s}^2 = \sum_{k=0}^{s} ||\phi_n^{(k)}||_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \sum_{k=0}^{s} ||x\phi_n^{(k)}||_\infty \; ||x^{-1}||_{\mathrm{L}^2}^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

c'est à dire $\phi_n \overset{\mathrm{H}^s}{\to} 0$.

— Montrons la densité de $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathrm{H}^s$. Soit $u \in \mathrm{H}^s$ alors par densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^2, il existe $(\phi_n) \in (\mathrm{L}^2)^{\mathbb{N}}$ tel que $\phi_n \overset{\mathrm{L}^2}{\to} (1+\xi^2)^{s/2}\hat{u}$. On a alors,

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} ||u_n - \hat{u}(1+\xi^2)^{s/2}||_{\mathrm{L}^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} ||(1+\xi^2)^{s/2}((1+\xi^2)^{-s/2}u_n - \hat{u})||_{\mathrm{L}^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} ||\widehat{(1+\xi^2)^{-s/2}u_n} - u)||_{\mathrm{H}^s}
\end{aligned}$$

En effet comme $u_n \in \mathrm{L}^2 \subset \mathcal{S}$, $(1+\xi^2)^{s/2}u_n \in \mathcal{S}$ et $\widehat{(1+\xi^2)^{-s/2}u_n} \in \mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{S}$ est dense dans H^s.
On en conclut que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est bien dense dans $\mathrm{H}^s(\mathbb{R})$. □

Proposition 1.2 Pour $s > \frac{1}{2}$, il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall u \in \mathrm{H}^s, ||\hat{u}||_{L^1} \leqslant C||u||_{\mathrm{H}^s}.$$

Démonstration. Soit $u \in \mathrm{H}^s$, par Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} ||\hat{u}||_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s/2}(1+\xi^2)^{s/2}|\hat{u}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \\ &\leqslant ||(1+\xi^2)^{-s/2}||_{\mathrm{L}^2}||(1+\xi^2)^{s/2}\hat{u}||_{\mathrm{L}^2} \\ &\leqslant ||(1+\xi^2)^{-s/2}||_{\mathrm{L}^2}||u||_{\mathrm{H}^s} \end{aligned}$$

Avec $C = ||(1+\xi^2)^{-s/2}||_{\mathrm{L}^2} < \infty$ lorsque $s > \frac{1}{2}$. □

Proposition 1.3 Si $s > 2$, $\mathrm{H}^s(\mathbb{R})$ est stable par produit et

$$\exists\, C > 0, \forall u, v \in \mathrm{H}^s, ||uv||_{\mathrm{H}^s} \leqslant C||u||_{\mathrm{H}^s}||v||_{\mathrm{H}^s}.$$

Démonstration.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, 2(x-y)^2 + 2y^2 - x^2 = (x-2y)^2 \geqslant 0.$$

Ainsi soit $s > 1$ et $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, Notons $\theta_s(\xi) = (1+\xi^2)^{s/2}$

$$\begin{aligned} \theta_{2s}(\xi) = (1+\xi^2)^s &\leqslant (1 + 2(\xi-\eta)^2 + 2\eta^2)^s \\ &\leqslant 2^s(1 + (\xi-\eta)^2 + 1 + \eta^2)^s \end{aligned}$$

Puis par l'inégalité de Jensen, on en déduit que :

$$\forall s > 2,\ \theta_s(\xi) \leqslant 2^s\theta_s(\xi-\eta) + 2^s\theta_s(\eta).$$

De plus, si $u, v \in \mathrm{H}^s$ et $s > 2$,

$$\begin{aligned} |\theta_s(\xi)\widehat{uv}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \theta_s(\xi)\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\eta) \, \mathrm{d}\eta \right| \\ &\leqslant 2^s \left(\int_{\mathbb{R}} |\theta_s(\xi-\eta)\hat{u}(\xi-\eta)| \times |\hat{v}(\eta)| \, \mathrm{d}\eta + \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi-\eta)| \times |\theta_s(\eta)\hat{v}(\eta)| \, \mathrm{d}\eta \right) \\ &\leqslant 2^s(\ |\theta_s\hat{u}| * |\hat{v}| + |\hat{u}| * |\theta_s\hat{v}|\ ) \end{aligned}$$

D'où par l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned} ||\theta_s\widehat{uv}||_{\mathrm{L}^2} &\leqslant 2^s\ (\ ||\ |\theta_s\hat{u}| * |\hat{v}|\ ||_{\mathrm{L}^2} + ||\ |\hat{u}| * |\theta_s\hat{v}|\ ||_{\mathrm{L}^2}\ ) \\ &\leqslant 2^s(||\theta_s\hat{u}||_{\mathrm{L}^2}||\hat{v}||_{L^1} + ||\hat{u}||_{L^1}||\theta_s\hat{v}||_{\mathrm{L}^2}) \end{aligned}$$

En utilisant la prop 1.2, il existe $C > 0$ tel que :

$$||uv||_{\mathrm{H}^s} = ||\theta_s\widehat{uv}||_{\mathrm{L}^2} \leqslant \frac{C}{2}\ (\ ||\theta_s\hat{u}||_{\mathrm{L}^2}||v||_{\mathrm{H}^s} + ||u||_{\mathrm{H}^s}||\theta_s\hat{v}||_{\mathrm{L}^2}\ ) = C||u||_{\mathrm{H}^s}||v||_{\mathrm{H}^s}.$$

□

Proposition 1.4 (De Morrey). Soit $k \in \mathbb{N}$ et $s > \frac{1}{2} + k$.
$\mathrm{H}^s(\mathbb{R})$ s'injecte continuement dans $\mathcal{B}_k(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^k$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre k tendent vers 0 en $\pm\infty$.

Démonstration.

— On commence par le cas $k = 0$. Soit $u \in \mathrm{H}^s$. On a pour $x, h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |u(x+h) - u(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)(e^{i\xi(x+h)} - e^{i\xi x}) \ \mathrm{d}\xi \right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} 2|\hat{u}(\xi) \sin\left(\frac{\xi h}{2}\right)| \ \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

Or $2|\hat{u}(\xi) \sin \frac{\xi h}{2}|$ est dominée par $2|\hat{u}| \in \mathrm{L}^1$ (proposition 1.2).
Par convergence dominée, $|u(x+h) - u(x)| \overset{h \to 0}{\to} 0$ et u est continue.
On a de plus :

$$||u||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)| \ \mathrm{d}\xi \ = ||\hat{u}||_{\mathrm{L}^1} \leqslant C||u||_{\mathrm{H}^s}.$$

Soit $\epsilon > 0$. Par la prop 1.1, $\exists u_\epsilon \in \mathcal{C}_c^\infty, ||u - u_\epsilon||_{\mathrm{H}^s} \leqslant \frac{\epsilon}{C}$. D'où $||u - u_\epsilon||_\infty \leqslant \epsilon$ et en particulier pour $\forall x \notin \operatorname{supp} u_\epsilon, |u(x)| \leqslant \epsilon$. Ainsi $u(x) \underset{x \to \pm\infty}{\to} 0$.

— Pour $k \geqslant 1$, on procède par récurrence. En effet, $u' \in \mathrm{H}^{s-1} \hookrightarrow \mathcal{B}^{k-1}$ par hypothèse de récurrence. Et par le premier point $u \in \mathcal{C}^0$ et tend vers 0 en $\pm\infty$. Ce qui signifie que $u \in \mathcal{B}^k$

□

Remarque 1.1 En particulier pour $s \geqslant 1$ et $u, v \in \mathrm{H}^s$, on a $\int_{\mathbb{R}} u'v = -\int_{\mathbb{R}} uv'$.

On peut maintenant préciser le problème (1). Pour $T > 0$ et $s > 0$ donnés, on cherche une solution de :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,T], \mathrm{H}^{s+4}) \cap \mathcal{C}^1([0,T], \mathrm{H}^{s+1}) \\ u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2}$$

Pour pouvoir démontrer des propriétés sur le problème (2), nous seront amenés à supposer T suffisamment petit et s suffisamment grand.

1.3 Opérateurs non bornés

La dérivation dans H^s n'est pas un opérateur de H^s dans lui-même. Dans ce paragraphe, inspiré de [3], nous établirons un cadre à ce type de fonctions.

Soit $(H, (\ ,\ )_H)$ un espace de Hilbert.

Définition 1.2 (opérateur non borné). Un opérateur non borné est un couple (A, D) où D est un sev de H et $A : D \to H$ une application linéaire.

On note $G(A) \subset H \times H$ le graphe d'un opérateur non borné A.

Définition 1.3 On dit qu'un opérateur non borné A est :
- dissipatif si $\forall g \in D, (Ag, g)_H \leqslant 0$
- maximal dissipatif s'il est dissipatif et $I - A : D \to H$ est surjectif.

Proposition 1.5 On a :
- (A,D) est dissipatif ssi $\forall \lambda \geqslant 0 \ \forall g \in H, ||(I - \lambda A)g||_H \geqslant ||g||_H$.
- Si (A, D) est maximal-dissipatif alors $(\lambda A, D)$ l'est aussi pour $\lambda \geqslant 0$.
- Si (A, D) est maximal-dissipatif, alors $G(A)$ est fermé dans $H \times H$.

Démonstration.
- $\boxed{\Rightarrow}$ si A est dissipatif, pour $\lambda \geqslant 0$ et $g \in H$, $||(I - \lambda A)g||_H^2 = ||g||_H^2 + \lambda^2 ||Ag||_H^2 - 2\lambda(Ag, g) \geqslant ||g||_H^2$.
  $\boxed{\Leftarrow}$ pour $\lambda \geqslant 0$ et $g \in H, ||(I - \lambda A)g||_H^2 - ||g||_H^2 \geqslant 0$ i.e. $\lambda^2 ||Ag||^2 - 2\lambda(Ag, g) \geqslant 0$. En divisant par λ et en prenant $\lambda \to 0$, on obtient que $(Ag, g) \leqslant 0$.
- Soit $\lambda > 0$. Il est clair que λA est dissipatif.
  Par définition et en utilisant le point précédent, $(I - A) : D \to H$ est bijectif et $||(I - A)^{-1}|| \leqslant 1$.
  Soit $h \in H$, notons $F \begin{cases} H & \to H \\ g & \mapsto (I - A)^{-1}((1 - \frac{1}{\lambda})g + \frac{1}{\lambda}h) \end{cases}$.
  On a $g - \lambda Ag = h \iff g = F(g)$. Or F est contractante :
  $$\forall (g_1, g_2) \in H^2, ||F(g_1) - F(g_2)|| \leqslant (1 - \frac{1}{\lambda})||(I - A)^{-1}|| \ ||g_1 - g_2||_H \leqslant (1 - \frac{1}{\lambda}) \ ||g_1 - g_2||_H.$$
  Par le point fixe de Banach, $I - \lambda A$ est surjectif. Ainsi $(\lambda A, D)$ est maximal dissipatif.
- Soit $(g_n, h_n) \in G(A)^{\mathbb{N}}$ tel que $(g_n, h_n) \underset{n \to \infty}{\to} (g, h)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, g_n = (I - A)^{-1}(g_n - h_n)$. Or $(I - A)^{-1}$ est continue. En passant à la limite, $g = (I - A)^{-1}(g - h)$ i.e. $g - Ag = g - h$ et $(g, h) \in G(A)$.

$\square$

Remarque 1.2 On peut ainsi définir pour $\lambda \geqslant 0$, la résolvante $R_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$ où $||R_\lambda|| \leqslant 1$.

Définition 1.4 Soit (A, D) un opérateur. On note
$$D^* = \{h \in H, \exists f \in H, \forall g \in D, (Ag, h)_H = (g, f)_H\}$$
et on définit (A^*, D^*) par $A^* h = f$ pour $h \in D^*$.

Lemme 1.1 Soit (A, D) maximal dissipatif alors pour $\lambda \geqslant 0$, $AR_\lambda = R_\lambda A = \frac{1}{\lambda}(-I + R_\lambda)$

Démonstration. $AR_\lambda = -\frac{1}{\lambda}(I - \lambda A)R_\lambda + \frac{1}{\lambda}R_\lambda = \frac{1}{\lambda}(-I + R_\lambda) = -\frac{1}{\lambda}R_\lambda(I - \lambda A) + \frac{1}{\lambda}R_\lambda = R_\lambda A.$ $\square$

Proposition 1.6 Un opérateur A maximal-dissipatif vérifiant $G(A) \subset G(A^*)$ est autoadjoint.

Démonstration.

— Montrons que (A^*, D^*) est dissipatif. Soit $h \in D^*$, alors $R_\lambda h \in D$ et $(A^*h, R_\lambda h)_H = (h, AR_\lambda h)_H$. D'où par le lemme 1.1 :

$$\begin{aligned}(A^*h, R_\lambda h)_H &= \frac{1}{\lambda}((h, R_\lambda h)_H - ||h||_H^2) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}||h||_H^2(||R_\lambda|| - 1) \leqslant 0.\end{aligned}$$

Or $||h - R_\lambda h||_H = ||\lambda R_\lambda A h||_H \leqslant \lambda ||Ah||_H \underset{\lambda\to 0}{\to} 0$. Ainsi $(A^*h, h) = \lim\limits_{\lambda\to 0^+}(A^*h, R_\lambda h) \leqslant 0$.

— Soit $h \in D^*$. Par maximal-dissipativité de A, il existe $g \in D$ tel que $g - Ag = h - A^*h$. Comme $G(A) \subset G(A^*)$, on a $g - h = A^*(g-h)$. Or par dissipativité de A^*, $0 = ||(I - A^*)(g-h)||_H \geqslant ||g-h||_H$. Ainsi $h = g \in D$ et $A = A^*$.

□

Théorème 1.1 (Yosida cas autoadjoint). Soit (A, D) un opérateur autoadjoint et maximal dissipatif. Alors il existe un unique semigroupe noté $(S(t))_{t\geqslant 0}$ ou $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$ tel que pour tout $g \in H$, $u(t) = S(t)g$ soit solution de :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,\infty), H) \cap \mathcal{C}((0,\infty), D) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty), H) \\ u_t = Au \\ u(0) = g \end{cases}$$

De plus $\forall t \geqslant 0, ||S(t)|| \leqslant 1$

Lemme 1.2 Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to H$ continue et une famille d'opérateurs $(S(t))_{t\geqslant 0}$ de H dans H tel que :

— $\forall t \geqslant 0, ||S(t)|| \leqslant 1$

— pour tout $g \in H,\ t \in \mathbb{R}_+ \mapsto S(t)g \in H$ soit continue

alors $t \mapsto S(t)\phi(t)$ est aussi continue.

Démonstration. Montrons par exemple la continuité à droite. Pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$:

$$||S(t)\phi(t) - S(t_0)\phi(t_0)||_H \leqslant ||S(t)(\phi(t) - \phi(t_0))||_H + ||(S(t) - S(t_0))\phi(t_0)||_H$$

Or $||S(t)(\phi(t) - \phi(t_0))||_H \leqslant ||\phi(t) - \phi(t_0)||_H \underset{t\to t_0^+}{\to} 0$ par continuité de ϕ.

Et $||(S(t) - S(t_0))\phi(t_0)||_H \underset{t\to t_0^+}{\to} 0$ par continuité de $t \mapsto S(t)\phi(t_0)$. □

2
RÉGULARISATION PARABOLIQUE DE L'ÉQUATION KDV

Dans un premier temps, on étudiera la régularisation de l'équation (2), par l'ajout d'une dérivée $4^{\text{ème}}$:

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,T], \mathrm{H}^{s+4}) \cap \mathcal{C}^1([0,T], \mathrm{H}^s) \\ u_t + \epsilon u_{xxxx} + u_{xxx} + uu_x = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Dans un deuxième temps on regardera ce que deviennent les solutions ainsi obtenues lorsque $\epsilon \to 0$. Cette démarche est tirée du début de [1].

2.1 Définition de l'opérateur $e^{-\epsilon t \partial_x^4}$

On considère l'équation (3) comme une perturbation de $u_t = -\epsilon \partial_x^4 u$.

Soit $s \in \mathbb{N}$. Notons $D = \mathrm{H}^{s+4}(\mathbb{R})$, $H = \mathrm{H}^s(\mathbb{R})$ et $A = -\partial_x^4 : D \to H$.

Proposition 2.1 (A, D) est un opérateur maximal-dissipatif dans H.

Démonstration.

— Soit $u \in \mathrm{H}^4$, alors

$$(-\partial_x^4 u, u)_{\mathrm{L}^2} = -\int_{\mathbb{R}} \partial_x^4 u \ u \ \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} (\partial_x^2 u)^2 \ \mathrm{d}x \leqslant 0.$$

En effet par intégration par parties, $\forall u, v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \partial_x^4 u \ v \ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u \ \partial_x^2 v \ \mathrm{d}x$. Puis par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans H^4 on obtient : $\forall u, v \in \mathrm{H}^4, (-\partial_x^4 u, v)_{\mathrm{L}^2} = -(\partial_x^2 u, \partial_x^2 v)_{\mathrm{L}^2}$.
D'où $\forall u, v \in D, (Au, u)_{\mathrm{H}^s} = -(\partial_x^2 u, \partial_x^2 u)_{\mathrm{H}^s} \leqslant 0$. Ainsi A est négatif donc dissipatif.

— Montrons que dans le cas $s = 0$, (A, D) est maximal-dissipatif. Soit

$$a : \begin{cases} \mathrm{H}^2 \times \mathrm{H}^2 & \to \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x) \ \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} u''(x)v''(x) \ \mathrm{d}x \end{cases}$$

Par Cauchy-Schwartz, a est une application bilinéaire continue de $(H^2, || \quad ||_{\mathrm{H}^2})$.
De plus, en utilisant la remarque 1.1, on a pour $u \in \mathrm{H}^2$:

$$\int_{\mathbb{R}} u'(x)^2 \ \mathrm{d}x = \left| \int_{\mathbb{R}} uu'' \ \mathrm{d}x \right| \leqslant ||u||_{\mathrm{L}^2} ||u''||_{\mathrm{L}^2} \leqslant \frac{1}{2}(||u||_{\mathrm{L}^2}^2 + ||u''||_{\mathrm{L}^2}^2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \frac{1}{2}(||u||_{\mathrm{L}^2}^2 + ||u''||_{\mathrm{L}^2}^2) + \frac{1}{2}(||u||_{\mathrm{L}^2}^2 + ||u''||_{\mathrm{L}^2}^2) \\ &\geqslant \frac{1}{2}(||u||_{\mathrm{L}^2}^2 + ||u''||_{\mathrm{L}^2}^2) + \frac{1}{2}||u'||_{\mathrm{L}^2}^2 \\ &\geqslant \frac{1}{2}||u||_{\mathrm{H}^2}^2 \end{aligned}$$

a est coercive.
Soit $f \in \mathrm{L}^2$, on applique le théorème de Lax-Miller à a et à la forme linéaire continue $\phi \in H^2 \mapsto \int f\phi$. Il existe donc $h \in H^2$, tel que $\forall \phi \in \mathrm{H}^2, a(h, \phi) = \int_{\mathbb{R}} f\phi$. Au sens des distributions $h^{(4)} = f - h$. Ainsi $h \in \mathrm{H}^4$ et $h - Ah = f$.
Ainsi, (A, H^4) est maximal dissipatif dans L^2.

— Pour $s \geqslant 1$, on suppose par réccurrence que (A, H^{s+3}) est maximal dissipatif dans H^{s-1}. Soit $f \in \mathrm{H}^s$, alors il existe $u \in \mathrm{H}^{s+3}$ tel que $u - Au = f$. On a alors $D^4 u = f - u \in \mathrm{H}^s$ et $u \in \mathrm{H}^{s+4}$. Ainsi (A, H^{s+4}) est maximal dissipatif dans H^s.

□

Proposition 2.2 Le semigroupe $(e^{-\epsilon t\partial_x^4})_t$ est bien défini pour tout $\epsilon > 0$. On a de plus un effet régularisant i.e. $\forall g \in H, e^{-\epsilon t\partial_x^4} g \in D$.

Démonstration.

- Par la proposition 1.5, on peut supposer $\epsilon = 1$.
- Par intégration par parties, on a :

$$\forall u, v \in D, (Au, v)_{\mathrm{H}^s} = (u, Av)_{\mathrm{H}^s}.$$

  Ainsi $G(A) \subset G(A^*)$. En utilisant la proposition 1.6, et la proposition 2.1 on a que (A, D) est autoadjoint dans H.
- Par le théorème de Yosida dans le cas autoadjoint 1.1, on obtient que $(e^{-\epsilon t\partial_x^4})_t$ est bien défini et régularisant.

$\square$

2.2 Quelques inégalités

Proposition 2.3 Soit $g \in \mathrm{L}^2$, alors $\mathcal{TF}(e^{-\epsilon t\partial_x^4} g)(\xi) = e^{-\epsilon t\xi^4}\mathcal{TF}g(\xi)$.

Démonstration. Notons $u(t) = e^{-\epsilon t\partial_x^4} g$. On a : $\partial_t u = -\epsilon\partial_x^4 u$ donc en Fourier :

$$\widehat{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}(t)(\xi) = -\epsilon\xi^4\widehat{u(t)}(\xi).$$

Supposons qu'il existe $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, tel que $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, |\partial_x^4 u(t)(x)| \leqslant g(x)$.

Alors par convergence dominée, on a $\widehat{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}(t) = \frac{\mathrm{d}\widehat{u(t)}}{\mathrm{d}t}$. Ainsi, $t \mapsto \widehat{u(t)}(\xi)$ est solution de l'équation $f'(t) = -\epsilon\xi^4 f(t)$ d'où on déduit le résultat. $\square$

Proposition 2.4 Pour $s \geqslant 3$ et $u, v \in \mathrm{H}^s$, on a pour tout $t \geqslant 0$ les inégalités suivantes :

$$||e^{-\epsilon t\partial_x^4} u||_{\mathrm{H}^s} \leqslant ||u||_{\mathrm{H}^s}$$

$$||e^{-\epsilon t\partial_x^4}\partial_x^3 u||_{\mathrm{H}^s} \leqslant \frac{1}{\epsilon^{3/4}t^{3/4}}||u||_{\mathrm{H}^s}$$

$$||e^{-\epsilon t\partial_x^4} u u_x||_{\mathrm{H}^s} \leqslant \frac{C}{\epsilon^{1/4}t^{1/4}}||u||_{\mathrm{H}^s}^2$$

$$||e^{-\epsilon t\partial_x^4}(u u_x - v v_x)||_{\mathrm{H}^s} \leqslant \frac{C}{\epsilon^{1/4}t^{1/4}}||u+v||_{\mathrm{H}^s}||u-v||_{\mathrm{H}^s}$$

où $C > 0$ ne dépend que de s.

Démonstration.

— En utilisant la prop 2.3,

$$||e^{-\epsilon t\partial_x^4}u||_{\mathrm{H}^s} = ||(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{e^{-\epsilon t\partial_x^4}u}||_{\mathrm{L}^2} = ||(1+\xi^2)^{s/2}e^{-\epsilon t\xi^4}\hat{u}||_{\mathrm{L}^2} \leqslant ||(1+\xi^2)^{s/2}\hat{u}||_{\mathrm{L}^2} = ||u||_{\mathrm{H}^s}.$$

— De même en remplaçant u par $\partial_x^3 u$,

$$||e^{-\epsilon t\partial_x^4}\partial_x^3 u||_{\mathrm{H}^s} = ||(1+\xi^2)^{s/2}e^{-\epsilon t\xi^4}\widehat{\partial_x^3 u}||_{\mathrm{L}^2} = ||\xi^3 e^{-\epsilon t\xi^4}(1+\xi^2)^{s/2}\hat{u}||_{\mathrm{L}^2}.$$

Par convexité, on a $\forall y>0, ye^{-y} \leqslant \frac{y}{1+y} < 1$. En l'appliquant à $y = \frac{4}{3}\epsilon t\xi^4$, on obtient $(\frac{4}{3}\epsilon t\xi^4 e^{-\frac{4}{3}\epsilon t\xi^4})^{\frac{3}{4}} \leqslant 1$ i.e.

$$\xi^3 e^{-\epsilon t\xi^4} \leqslant (\frac{3}{4})^{3/4}(\epsilon t)^{-3/4} \leqslant \frac{1}{\epsilon^{3/4}t^{3/4}}.$$

En remplaçant dans l'égalité précédente :

$$||e^{-\epsilon t\partial_x^4}u||_{\mathrm{H}^s} \leqslant \frac{1}{\epsilon^{3/4}t^{3/4}}||(1+\xi^2)^{s/2}\hat{u}||_{\mathrm{L}^2} = \frac{1}{\epsilon^{3/4}t^{3/4}}||u||_{\mathrm{H}^s}.$$

— De même pour uu_x,

$$||e^{-\epsilon t\partial_x^4}uu_x||_{\mathrm{H}^s} = ||(1+\xi^2)^{s/2}e^{-\epsilon t\xi^4}\widehat{\partial_x(\frac{u^2}{2})}||_{\mathrm{L}^2} = \frac{1}{2}||\xi e^{-\epsilon t\xi^4}(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{u^2}||_{\mathrm{L}^2}$$

Par convexité, on a $(4\epsilon t\xi^4 e^{-4\epsilon t\xi^4})^{\frac{1}{4}} \leqslant 1$ c'est à dire $\xi e^{-\epsilon t\xi^4} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\epsilon^{1/4}t^{1/4}}$. D'où

$$||e^{-\epsilon t\partial_x^4}uu_x||_{\mathrm{H}^s} \leqslant \frac{1}{\epsilon^{1/4}t^{1/4}}||u^2||_{\mathrm{H}^s}.$$

En utilisant la prop 1.3, il existe C ne dépendant que de s tel que :

$$||e^{-\epsilon t\partial_x^4}uu_x||_{\mathrm{H}^s} \leqslant \frac{C}{\epsilon^{1/4}t^{1/4}}||u||_{\mathrm{H}^s}^2.$$

— Comme précédemment on a l'inégalité :

$$||e^{-\epsilon t\partial_x^4}(uu_x - vv_x)||_{\mathrm{H}^s} \leqslant \frac{1}{\epsilon^{1/4}t^{1/4}}||u^2 - v^2||_{\mathrm{H}^s}.$$

La prop 1.3 donne cette fois $||u^2 - v^2|| \leqslant C||u-v||_{\mathrm{H}^s}||u+v||_{\mathrm{H}^s}$ ce qui donne la dernière inégalité.

□

2.3 Existence d'une solution de l'équation régularisée

Soit $s \geqslant 3$. Dans ce paragraphe on va montrer que pour $\epsilon > 0$ et $u_0 \in \mathrm{H}^{s+4}$, il existe $T_1 > 0$ dépendant de ϵ et de u_0 tel que l'équation (3) admette une solution. Pour cela, il suffit de trouver une solution de :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,T_1], \mathrm{H}^{s+4}) \\ u(t) = e^{-\epsilon t\partial_x^4}u_0 - \displaystyle\int_0^t e^{-\epsilon(t-\tau)\partial_x^4}(u_{xxx} + uu_x)\,\mathrm{d}\tau \end{cases} \tag{4}$$

En effet :

Proposition 2.5 Si u est une solution de (4) alors u est aussi une solution de (3).

Démonstration. Soit u solution de (4). Par le théorème 1.1, $\frac{\mathrm{d}e^{-\epsilon t\partial_x^4}u_0}{\mathrm{d}t} = -\epsilon\partial_x^4 e^{-\epsilon t\partial_x^4}u_0$.
Notons $v(t) = \int_0^t e^{-\epsilon(t-\tau)\partial_x^4}(u_{xxx} + uu_x)\ \mathrm{d}x$ et $S(t) = e^{-\epsilon t\partial_x^4}$. Pour $t \in [0, T_1)$ et $\delta \in (0, T_1 - t]$

$$\frac{v(t+\delta) - v(t)}{\delta} = \int_0^t \frac{S(t+\delta-\tau) - S(t-\tau)}{\delta}(u_{xxx}(\tau)+uu_x(\tau))\ \mathrm{d}\tau + \frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} S(t+\delta-\tau)(u_{xxx}(\tau)+uu_x(\tau))\ \mathrm{d}\tau$$

Or pour $t \in \mathbb{R}_+,\ S(t)$ est linéaire et continu. Il commute donc avec l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{S(t+\delta-\tau) - S(t-\tau)}{\delta}(u_{xxx}(\tau) + uu_x(\tau))\ \mathrm{d}\tau &= \frac{S(\delta) - I}{\delta}v(t)\\ &\underset{\delta\to 0^+}{\to} \frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}\delta}(S(\delta)v(t))_{\delta=0} \qquad \text{en utilisant Yosida}\\ &= -\epsilon\partial_x^4 v(t)\end{aligned}$$

De plus par continuité $\frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} S(t+\delta-\tau)(u_{xxx}(\tau) + uu_x(\tau))\ \mathrm{d}\tau \underset{\delta\to 0^+}{\to} u_{xxx}(t) + u(t)u_x(t)$.
En effet $\tau \mapsto S(t-\tau)(u_{xxx}(\tau) + uu_x(\tau))$ est continue (lemme 1.2). Ainsi en réappliquant le lemme 1.2 : $\frac{S(\delta)}{\delta}\int_t^{t+\delta} S(t-\tau)(u_{xxx}(\tau) + uu_x(\tau))\ \mathrm{d}\tau \underset{\delta\to 0^+}{\to} u_{xxx}(t) + u(t)u_x(t)$.

Ainsi v est dérivable à droite. De même v est dérivable à gauche et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v = -\epsilon\partial_x^4 v(t) + u_{xxx}(t) + u(t)u_x(t) \in \mathcal{C}([0, T_1], \mathrm{H}^s)$$

D'où $u \in \mathcal{C}^1([0, T_1], \mathrm{H}^s)$ et :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u &= -\epsilon\partial_x^4(u_0 - v(t)) - (u_{xxx}(t) + u(t)u_x(t))\\ &= -\epsilon u_{xxxx} - u_{xxx} - uu_x.\end{aligned}$$

C'est à dire que u est solution de (3). □

Proposition 2.6 Soit $u_0 \in \mathrm{H}^{s+4}$ et $T > 0$, on note

$$X_T = \{u \in \mathcal{C}([0, T], \mathrm{H}^{s+4}), u(0, x) = u_0(x) \text{ et } \sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_{\mathrm{H}^s} \leqslant 2||u_0||_{\mathrm{H}^s}\}.$$

Soit $\epsilon > 0$, il existe $T_1(\epsilon, ||u_0||_{\mathrm{H}^s}) > 0$ tel que pour $0 < T \leqslant T_1$, l'opérateur suivant soit défini :

$$\Gamma \left\{\begin{array}{lcl} X_T & \to & X_T \\ u & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} [0, T] & \to \mathrm{H}^{s+4} \\ t & \mapsto e^{-\epsilon t\partial_x^4}u_0 - \int_0^t e^{-\epsilon(t-\tau)\partial_x^4}(u_{xxx} + uu_x)\ \mathrm{d}x \end{array}\right.\end{array}\right.$$

Démonstration.

Tout d'abord la proposition 2.2 permet de définir $(e^{-\epsilon t\partial_x^4})_t$ et d'affirmer grâce à l'effet régularisant que :

$$\forall u \in \mathrm{H}^{s+4}, \forall t > 0, e^{-\epsilon t\partial_x^4}(u_{xxx} + uu_x) \in \mathrm{H}^{s+4}.$$

Ainsi $\forall T > 0, \Gamma(X_T) \subset \mathcal{C}([0,T], \mathrm{H}^{s+4})$.

Montrons que $\exists\ T_1 > 0, \forall\ 0 < T \leqslant T_1,\ \Gamma(X_T) \subset X_T$. Soit $t > 0$ et $u \in X_t$,

$$||\Gamma u(t)||_{\mathrm{H}^s} \leqslant ||e^{-\epsilon t\partial_x^4}u_0||_{\mathrm{H}^s} + \int_0^t ||e^{-\epsilon(t-\tau)\partial_x^4}u_{xxx}||_{\mathrm{H}^s}\ \mathrm{d}\tau + \int_0^t ||e^{\epsilon(t-\tau)\partial_x^4}uu_x||_{\mathrm{H}^s}\ \mathrm{d}\tau$$

En utilisant les inégalités de la prop 2.4 :

$$\begin{aligned}
||\Gamma u(t)||_{\mathrm{H}^s} &\leqslant ||u_0||_{\mathrm{H}^s} + \frac{1}{\epsilon^{3/4}}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/4}}||u(\tau)||_{\mathrm{H}^s}\ \mathrm{d}\tau + \frac{C}{\epsilon^{1/4}}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/4}}||u(\tau)||^2_{\mathrm{H}^s}\ \mathrm{d}\tau \\
&\leqslant ||u_0||_{\mathrm{H}^s}\left(1 + \frac{1}{\epsilon^{3/4}}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{(t-\tau)^{3/4}} + \frac{C||u_0||_{\mathrm{H}^s}}{\epsilon^{1/4}}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{(t-\tau)^{1/4}}\right) \quad \text{car } u \in X_t \\
&\leqslant ||u_0||_{\mathrm{H}^s}\left(1 + 4\epsilon^{-3/4}t^{1/4} + \frac{4C||u_0||_{\mathrm{H}^s}}{3}\epsilon^{1/4}t^{3/4}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall u_0 \in \mathrm{H}^{s+4},\ \exists T_1 > 0\ \forall\ 0 < T \leqslant T_1, \Gamma(X_T) \subset X_T.$$

□

Proposition 2.7 Pour tout $\epsilon > 0$ et $u_0 \in \mathrm{H}^{s+4}$, il existe $T > 0$ tel que (4) admette une solution unique dans X_T.

Démonstration.

— Notre objectif est d'appliquer le théorème du point fixe de Banach à $\Gamma : (X_T, ||\quad||_\infty) \to (X_T, ||\quad||_\infty)$ pour T petit.

— Comme H^{s+4} est un Banach (definition 1.1), $\mathcal{C}([0,T], \mathrm{H}^{s+4})$ l'est aussi pour $T > 0$.
Or $X_T = \mathcal{B}_{X_T}(||u_0||_{\mathrm{H}^s}) \cap \mathrm{eval}_{t=0}^{-1}(u_0)$ est un fermé de $\mathcal{C}([0,T], \mathrm{H}^{s+4})$ par continuité de $\mathrm{eval}_{t=0} : u \mapsto u(0)$ $(||u(0)||_{\mathrm{H}^s} \leqslant \sup_{[0,T]} ||u||_{\mathrm{H}^{s+4}})$ et de $u \mapsto ||u||_{\mathrm{H}^s}$. X_T est donc un espace de Banach.

— Soit T tel que Γ soit bien définie et $u, v \in X_T$. En réutilisant les inégalités de la prop 2.4 :

$$\begin{aligned}
||\Gamma u(T) - \Gamma v(T)||_{\mathrm{H}^s} &\leqslant \int_0^T \frac{||u(\tau) - v(\tau)||_{\mathrm{H}^s}}{\epsilon^{3/4}(T-\tau)^{3/4}}\ \mathrm{d}\tau + \int_0^T \frac{C||u(\tau) - v(\tau)||_{\mathrm{H}^s}||u(\tau) + v(\tau)||_{\mathrm{H}^s}}{\epsilon^{1/4}(T-\tau)^{1/4}}\ \mathrm{d}\tau \\
&\leqslant ||u - v||_\infty\left(4\epsilon^{-3/4}T^{1/4} + \frac{8C||u+v||_\infty}{3}\epsilon^{1/4}T^{3/4}\right)
\end{aligned}$$

Or comme $u, v \in X_T$, on a $||u+v||_\infty \leqslant 4||u_0||_{\mathrm{H}^s}$. Ainsi pour $T > 0$ suffisamment petit, Γ est contractante.

— On est bien dans les conditions du théorèmes du point fixe et donc (4) a une solution pour un certain $T > 0$. Cette solution est unique dans X_T.

□

On note $T_{max}(\epsilon, u_0) = \sup\{T \geqslant 0 \mid \exists! u \in X_T(u_0), u = \Gamma u\}$.

Remarque 2.1 On voit dans ces deux dernières preuves que :

$$4\epsilon^{-3/4}T_1^{1/4} + \frac{8C||u_0||_{\mathrm{H}^s}}{3}\epsilon^{1/4}T_1^{3/4} < 1 \Longrightarrow T \leqslant T_{max}(\epsilon, u_0).$$

On a donc que $T_{max}(\epsilon, u_0) \geqslant \min\left(\frac{\epsilon^{3/4}}{8}, \frac{3\epsilon^{1/4}}{16C}\right)\frac{1}{1+||u_0||_{\mathrm{H}^s}^{4/3}}$.

La proposition 2.7 permet de définir $u \in \mathcal{C}([0, T_{max}(\epsilon, u_0)), \mathrm{H}^{s+4})$ tel que pour tout $T < T_{max}(\epsilon, u_0)$, $u_{|[0,T]}$ soit le point fixe de Γ dans X_T. On va montrer que c'est la condition $||u(T)||_{\mathrm{H}^s} \leqslant 2||u_0||_{\mathrm{H}^s}$ qui limite le domaine de définition de la solution :

Proposition 2.8 $T_{max}(\epsilon, u_0) \in \sup\{T \geqslant 0 \mid \exists! u \in X_T(u_0), u = \Gamma u\}$.
En notant u le point fixe de Γ dans $X_{T_{max}(\epsilon,u_0)}$, on a : $||u(T_{max}(\epsilon, u_0))||_{\mathrm{H}^s} = 2||u_0||_{\mathrm{H}^s}$.

Démonstration.

— Par la remarque 2.1, comme pour $T \in [0, T_{max})$, $||u(T)||_{\mathrm{H}^s} \leqslant 2||u_0||_{\mathrm{H}^s}$, on a :

$$T_{max}(\epsilon, u(T)) \geqslant \min\left(\frac{\epsilon^{3/4}}{8}, \frac{3\epsilon^{1/4}}{16C}\right)\frac{1}{1 + (2||u_0||_{\mathrm{H}^s})^{4/3}}.$$

On en déduit qu'il existe $T_0 \in [0, T_{max}(\epsilon, u_0))$ tel que $T_0 + T_{max}(\epsilon, u(T_0)) > T_{max}(\epsilon, u_0)$. On a ainsi prolongé u en un point fixe $\overline{u}$ de Γ dans

$$\{v \in \mathcal{C}([0, T_1], \mathrm{H}^{s+4}) \mid \sup_{[0,T_0]} ||v(T)||_{\mathrm{H}^s} \leqslant 2||u_0||_{\mathrm{H}^s} \text{ et } \sup_{[T_0,T_1]} ||v(T)||_{\mathrm{H}^s} \leqslant 2||u(T_0)||_{\mathrm{H}^s}\}$$

où $T_{max}(\epsilon, u_0) < T_1 < T_0 + T_{max}(\epsilon, u(T_0))$. De plus, par continuité $||\overline{u}(T_{max}(\epsilon, u_0))||_{\mathrm{H}^s} \leqslant 2||u_0||_{\mathrm{H}^s}$. Ainsi $T_{max}(\epsilon, u_0) \in \sup\{T \geqslant 0 \mid \exists! u \in X_T(u_0), u = \Gamma u\}$.

— Si par l'absurde, $||\overline{u}(T_{max}(\epsilon, u_0))||_{\mathrm{H}^s} < 2||u_0||_{\mathrm{H}^s}$ alors il existe $T_{max}(\epsilon, u_0) < T_2 < T_1$ tel que $\overline{u}_{|[0,T_2]} \in X_{T_2}$.

De plus $\overline{u}_{|[0,T_2]}$ est l'unique point fixe de Γ dans X_{T_2}. En effet, soit $v \in X_{T_2}$, tel que $\Gamma v = v$. Alors $v_{|[0,T_0]} \in X_{T_0}$ est un point fixe de Γ donc par l'unicité de la proposition 2.7, $u_{|[0,T_0]} = v_{|[0,T_0]}$. De même, pour la restriction à $[T_0, T_2]$ ce qui donne $\overline{u}_{|[0,T_2]} = v$. On a ainsi contredit la maximalité de $T_{max}(\epsilon, u_0)$. On conclut que $||\overline{u}(T_{max}(\epsilon, u_0))||_{\mathrm{H}^s} = 2||u_0||_{\mathrm{H}^s}$.

□

3
CONVERGENCE VERS UNE SOLUTION DE KDV

3.1 Solutions régularisées définies sur un intervalle commun

Lemme 3.1 Soit H un Hilbert, $a : H^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique continue et $u \in \mathcal{C}^1([0, T], H)$ $(T > 0)$ alors $a(u, u) \in \mathcal{C}^1([0, T], H)$.

Démonstration. Soit $t \in [0,T]$ et $h \in [-t, T-t]$ alors :

$$\begin{aligned}\frac{a(u,u)(t+h) - a(u,u)(t)}{h} &= \frac{a(u(t+h),u(t+h)) - a(u(t),u(t))}{h} \\ &= a\left(u(t+h), \frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right) + a\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}, u(t)\right) \\ &\underset{h\to 0}{\to} 2a(u'(t), u(t))\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1 (Inégalité énergétique). Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ et $u_0 \in \mathrm{H}^{s+4}$, la solution $u \in X_T$ de l'équation (4) ($T \in [0, T_{max}(\epsilon, u_0)]$) vérifie :

$$||u(T)||^2_{\mathrm{H}^s} \leqslant ||u_0||^2_{\mathrm{H}^s} + C\int_0^T ||u(\tau)||^3_{\mathrm{H}^s}\ \mathrm{d}\tau.$$

Démonstration. Soit $k \in \{0, \ldots, s\}$ et $a : (u,v) \in \mathrm{H}^{s+4} \times \mathrm{H}^{s+4} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \partial_x^k u \partial_x^k v\ \mathrm{d}x$.
Par Cauchy-Scwartz, $|a(u,v)| \leqslant ||u||_{\mathrm{H}^{s+4}}||v||_{\mathrm{H}^{s+4}}$ i.e. a est continue.
Par le lemme 2.5 u est aussi solution de (3) et en particulier $u \in \mathcal{C}^1([0;T], \mathrm{H}^{s+4})$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\partial_t ||\partial_x^k u(t)||^2_{\mathrm{L}^2} &= 2\int_{\mathbb{R}} \partial_x^k u_t \partial_x^k u\ \mathrm{d}x \qquad \text{(lemme 3.1)} \\ &= -2\int_{\mathbb{R}} \partial_x^{k+3} u \partial_x^k u\ \mathrm{d}x - 2\epsilon \int_{\mathbb{R}} \partial_x^{k+4} u \partial_x^k u\ \mathrm{d}x - 2\int_{\mathbb{R}} \partial_x^k (uu_x) \partial_x^k u\ \mathrm{d}x \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} \partial_x^{k+2} u \partial_x^{k+1} u\ \mathrm{d}x - 2\epsilon \int_{\mathbb{R}} (\partial_x^{k+2} u)^2\ \mathrm{d}x - 2\int_{\mathbb{R}} \partial_x^k (uu_x) \partial_x^k u\ \mathrm{d}x \quad \text{(IPP)} \\ &\leqslant [(\partial_x^{k+1} u)^2]_{-\infty}^{\infty} - 2\int_{\mathbb{R}} \partial_x^k (uu_x) \partial_x^k u\ \mathrm{d}x \\ &\leqslant -2\int_{\mathbb{R}} \partial_x^k (uu_x) \partial_x^k u\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}} \partial_x^k (uu_x) \partial_x^k u\ \mathrm{d}x &= -\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \int_{\mathbb{R}} \partial_x^l u \partial_x^{k+1-l} u \partial_x^k u\ \mathrm{d}x \\ &\leqslant -\int_{\mathbb{R}} u\partial_x \frac{(\partial_x^k u)^2}{2}\ \mathrm{d}x + \sum_{l=1}^{k-1}\binom{k}{l} ||\partial_x^l u||_\infty ||\partial_x^{k+1-l} u||_{\mathrm{L}^2} ||\partial_x^k u||_{\mathrm{L}^2} + ||\partial_x u||_\infty ||\partial_x^k u||^2_{\mathrm{L}^2}\end{aligned}$$

En utilisant 1.4, pour $l < k - \frac{1}{2}$, $\exists C > 0 \forall u \in \mathrm{H}^k, ||\partial_x^l u||_\infty \leqslant C||u||_{\mathrm{H}^k}$. De plus

$$-\int_{\mathbb{R}} u\partial_x (\partial_x^k u)^2\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \partial_x u (\partial_x^k u)^2\ \mathrm{d}x \leqslant ||\partial_x u||_\infty ||\partial_x^k u||^2_{\mathrm{L}^2}.$$

Ainsi pour un certain $C > 0$, $\partial_t ||\partial_x^k u(t)||^2_{\mathrm{L}^2} \leqslant C||u||^3_{\mathrm{H}^k}$. D'où on déduit que $\partial_t ||u(t)||^2_{\mathrm{H}^s} \leqslant C||u||^3_{\mathrm{H}^s}$ et :

$$||u(T)||^2_{\mathrm{H}^s} \leqslant ||u_0||^2_{\mathrm{H}^s} + C\int_0^T ||u(\tau)||^3_{\mathrm{H}^s}\ \mathrm{d}\tau$$

□

Définition 3.1 Soit $\epsilon > 0$ et $u_0 \in \mathrm{H}^{s+4}$.On définit par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} T_n & = T_{max}(\epsilon, u_{n-1}(T_{n-1})) \\ u_n & \in X_{T_n}(\epsilon, u_{n-1}(T_{n-1})) \text{ vérifiant } \Gamma u_n = u_n \end{cases}$$

(où $T_0 = 0$).

On définit pour $t < \sum_{k=1}^{\infty} T_k$, l'entier $n(t) = \max\{n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} T_k < t\}$ et

$$u^\epsilon(t) = u_{n(t)}(t - \sum_{k=1}^{n(t)} T_k)$$

.

Démonstration. Par la proposition 2.8, on a que u est bien définie et continue sur $[0, T]$. □

Proposition 3.2 Soit $u_0 \in \mathrm{H}^{s+4}$ alors $\inf_{\epsilon>0} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\epsilon, u_0) > 0$.

Démonstration.

— Soit $\epsilon > 0$, $u_0 \in \mathrm{H}^{s+4}$, et $u \in X_{T_{max}(\epsilon,u_0)}$ le point fixe de Γ.
Par l'inégalité énergétique 3.1, pour $T \leqslant T_{max}(\epsilon, u_0)$:

$$||u(T)||^2_{\mathrm{H}^s} \leqslant ||u_0||^2_{\mathrm{H}^s}(1 + 8C||u_0||_{\mathrm{H}^s} T).$$

Ainsi par la proposition 2.8, si $T < (8C||u_0||_{\mathrm{H}^s})^{-1}$ alors $||u(T)||_{\mathrm{H}^s} \leqslant 2||u_0||_{\mathrm{H}^s}$ et $T < T_{max}(\epsilon, u_0)$. D'où $T_{max}(\epsilon, u_0) \geqslant (8C||u_0||_{\mathrm{H}^s})^{-1}$.

— De plus, $\forall n \geqslant 0, ||u_n(T_n)||_{\mathrm{H}^s} = 2^n ||u_0||_{\mathrm{H}^s}$ donc $T_n \geqslant (8C||u_0||_{\mathrm{H}^s})^{-1} \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} T_k \geqslant \dfrac{1}{8C||u_0||_{\mathrm{H}^s}}$.
Comme C est indépendant de ϵ, on obtient le résultat voulu.

□

On a ainsi que tous les u^ϵ sont définis sur un intervalle commun $[0, T]$, indépendant de $\epsilon > 0$.

3.2 EXISTENCE D'UNE SOLUTION DE KDV (2)

Soit $s \geqslant 4$. On obtient ainsi $T > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ on ait une solution u^ϵ de (3) définie sur $[0, T]$. Quitte à restreindre T, on peut supposer (proposition 3.2) que pour $\epsilon > 0$ et $t \in [0, T]$, $||u^\epsilon||_{\mathrm{H}^s} \leqslant 2||u_0||_{\mathrm{H}^s}$. On choisit un tel T.

Proposition 3.3 $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T],\mathrm{L}^2)$.

Démonstration. Par le lemme 3.1 appliqué à $u^\epsilon - u^{\epsilon'} \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathrm{H}^{s+4})$ et $u,v\in \mathrm{H}^{s+4} \mapsto \int_R uv$, on a :

$$\partial_t ||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||^2_{\mathrm{L}^2} = \int_{\mathbb{R}} 2(u^\epsilon - u^{\epsilon'})(u^\epsilon_t - u^{\epsilon'}_t)\ \mathrm{d}x.$$

Or

$$\begin{aligned} u^\epsilon_t - u^{\epsilon'}_t &= -(\epsilon u^\epsilon_{xxxx} - \epsilon' u^{\epsilon'}_{xxxx}) - (u^\epsilon_{xxx} - u^{\epsilon'}_{xxx}) - \frac{1}{2}\partial_x((u^\epsilon)^2 - (u^{\epsilon'})^2) \\ &= -\epsilon'\partial_x^4(u^\epsilon - u^{\epsilon'}) - (\epsilon-\epsilon')\partial_x^4 u^\epsilon - \partial_x^3(u^\epsilon - u^{\epsilon'}) - \frac{1}{2}\partial_x[(u^\epsilon + u^{\epsilon'})(u^\epsilon - u^{\epsilon'})]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \partial_t ||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||^2_{\mathrm{L}^2} = -2\epsilon' \int_{\mathbb{R}} (u^\epsilon - u^{\epsilon'})\partial_x^4(u^\epsilon - u^{\epsilon'})\ \mathrm{d}x - 2(\epsilon-\epsilon')\int_{\mathbb{R}}(u^\epsilon - u^{\epsilon'})\partial_x^4 u^\epsilon\ \mathrm{d}x \\ - 2\int_{\mathbb{R}}(u^\epsilon - u^{\epsilon'})\partial_x^3(u^\epsilon - u^{\epsilon'})\ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}}(u^\epsilon - u^{\epsilon'})\partial_x[(u^\epsilon + u^{\epsilon'})(u^\epsilon - u^{\epsilon'})]\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Par intégration par parties on a :

$$\int_{\mathbb{R}} (u^\epsilon - u^{\epsilon'})\partial_x^4(u^\epsilon - u^{\epsilon'})\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial^2}{\partial_x}(u^\epsilon - u^{\epsilon'})\right)^2\ \mathrm{d}x \geqslant 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (u^\epsilon - u^{\epsilon'})\partial_x^3(u^\epsilon - u^{\epsilon'})\ \mathrm{d}x &= -\int_{\mathbb{R}} \partial_x(u^\epsilon - u^{\epsilon'})\partial_x^2(u^\epsilon - u^{\epsilon'})\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \partial_x\left(\frac{1}{2}(\partial_x(u^\epsilon - u^{\epsilon'}))^2\right)\ \mathrm{d}x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (u^\epsilon - u^{\epsilon'})\partial_x[(u^\epsilon + u^{\epsilon'})(u^\epsilon - u^{\epsilon'})]\ \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} (u^\epsilon - u^{\epsilon'})^2\partial_x(u^\epsilon + u^{\epsilon'})\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(u^\epsilon + u^{\epsilon'})\partial_x\left[(u^\epsilon - u^{\epsilon'})^2\right]\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (u^\epsilon - u^{\epsilon'})^2\partial_x(u^\epsilon + u^{\epsilon'})\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \partial_t ||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||^2_{\mathrm{L}^2} &\leqslant -2(\epsilon-\epsilon')\int_{\mathbb{R}}(u^\epsilon - u^{\epsilon'})\partial_x^4 u^\epsilon\ \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(u^\epsilon - u^{\epsilon'})^2\partial_x(u^\epsilon + u^{\epsilon'})\ \mathrm{d}x \\ &\leqslant 2|\epsilon-\epsilon'|\ ||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||_{\mathrm{L}^2}||\partial_x^4 u^\epsilon||_{\mathrm{L}^2} + \frac{1}{2}||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||^2_{\mathrm{L}^2}||\partial_x(u^\epsilon + u^{\epsilon'})||_\infty \\ &\leqslant 2|\epsilon-\epsilon'|\ ||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||_{\mathrm{L}^2}||u^\epsilon||_{\mathrm{H}^4} + \frac{C}{2}||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||^2_{\mathrm{L}^2}(||u^\epsilon||_{\mathrm{H}^4} + ||u^{\epsilon'}||_{\mathrm{H}^4}). \end{aligned}$$

En effet, par la proposition 1.4, il existe $C>0$ tel que pour $u\in\mathrm{H}^s$ $(s>\frac{3}{2})$ on ait : $||\partial_x u||_\infty \leqslant C||u||_{\mathrm{H}^s}$.

En utilisant le fait que $\forall \epsilon > 0, \forall t \in [0,T], ||u^\epsilon(t)||_{\mathrm{H}^s} \leqslant 2||u_0||_{\mathrm{H}^s}$, on a pour $s \geqslant 4$:

$$\partial_t ||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||_{\mathrm{L}^2} \leqslant 4||u_0||_{\mathrm{H}^s}|\epsilon - \epsilon'| + 4C||u_0||_{\mathrm{H}^s}||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||_{\mathrm{L}^2}.$$

Puis en intégrant :

$$||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||_{\mathrm{L}^2}(t) \leqslant 4T||u_0||_{\mathrm{H}^s}\ |\epsilon - \epsilon'| + 4C||u_0||_{\mathrm{H}^s} \int_0^t ||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||_{\mathrm{L}^2}\ \mathrm{d}x$$

Par Gronwall :

$$\sup_{[0,T]} ||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||_{\mathrm{L}^2} \leqslant 4T||u_0||_{\mathrm{H}^s}\ \exp\left(4C||u_0||_{\mathrm{H}^s}T\right)|\epsilon - \epsilon'|$$

Ainsi $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T],\mathrm{L}^2)$. □

Lemme 3.2 Soit $0 \leqslant r < s$ alors $(\mathcal{C}([0,T],\mathrm{L}^2) \cap \mathrm{L}^\infty([0,T],\mathrm{H}^s), \mathrm{L}^\infty\mathrm{H}^{2r-s}) \underset{continue}{\hookrightarrow} (\mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^r), \mathrm{L}^\infty\mathrm{H}^{2r-s})$.

Démonstration.

— Montrons que pour $r \leqslant \frac{s}{2}$:

$$\mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{2r-s}) \cap \mathrm{L}^\infty([0,T],\mathrm{H}^s) \underset{continue}{\hookrightarrow} \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^r).$$

Soit $u \in \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{2r-s}) \cap \mathrm{L}^\infty([0,T],\mathrm{H}^s)$ alors avec Cauchy-Schwartz, pour $t, t_0 \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} ||u(t) - u(t_0)||_{\mathrm{H}^r}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^r |\hat{u}(t) - \hat{u}(t_0)|^2\ \mathrm{d}\xi \\ &\leqslant ||(1+\xi^2)^{s/2}(\hat{u}(t) - \hat{u}(t_0))||_{\mathrm{L}^2} ||(1+\xi^2)^{r-s/2}(\hat{u}(t) - \hat{u}(t_0))||_{\mathrm{L}^2} \\ &\leqslant 2 \sup_{\tau\in[0,T]} ||u(\tau)||_{\mathrm{H}^s} ||u(t) - u(t_0)||_{\mathrm{H}^{2r-s}} \end{aligned}$$

Or $u \in \mathrm{L}^\infty([0,T],\mathrm{H}^s) \Rightarrow 2\sup_{\tau\in[0,T]} ||u(\tau)||_{\mathrm{H}^s} < \infty$ (on peut choisir un représentant borné de u) et $u \in \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{2r-s}) \Rightarrow ||u(t) - u(t_0)||_{\mathrm{H}^{2r-s}} \underset{t\to t_0}{\to} 0$. D'où, $||u(t) - u(t_0)||_{\mathrm{H}^r} \underset{t\to t_0}{\to} 0$ et $u \in \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^r)$.
De même pour $u, v \in \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{2r-s}) \cap \mathrm{L}^\infty([0,T],\mathrm{H}^s)$:

$$\sup_{\tau\in[0,T]} ||u(\tau) - v(\tau)||_{\mathrm{H}^r} \leqslant \Big(\sup_{\tau\in[0,T]} ||u(\tau)||_{\mathrm{H}^s} + \sup_{\tau\in[0,T]} ||v(\tau)||_{\mathrm{H}^s}\Big)||u - v||_{\mathrm{H}^{2r-s}}.$$

Ainsi $\quad u \xrightarrow{\mathrm{L}^\infty\mathrm{H}^{2r-s}} v \quad \Longrightarrow \quad u \xrightarrow{\mathrm{L}^\infty\mathrm{H}^s} v \quad$ i.e. l'inclusion est continue.

— Soit $u \in \mathcal{C}([0,T],\mathrm{L}^2) \cap \mathrm{L}^\infty([0,T],\mathrm{H}^s)$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u \in \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{s(1-2^{-n})})$.
Pour $n = 0$, le résultat est évident.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u \in \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{s(1-2^{-n})})$. Par le premier point avec $r = s(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$, on a :

$$u \in \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{s(1-2^{-n})}) \cap \mathrm{L}^\infty([0,T],\mathrm{H}^s) \subset \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{s(1-2^{-(n+1)})}).$$

De plus ces inclusions sont continues.

— Soit $r \in [0,s)$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $r < s(1 - \frac{1}{2^n})$.
Par ce qui précède : $\mathcal{C}([0,T],\mathrm{L}^2) \cap \mathrm{L}^\infty([0,T],\mathrm{H}^s) \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{s(1-\frac{1}{2^n})})$. Or $||\quad||_{\mathrm{H}^r} \leqslant ||\quad||_{\mathrm{H}^{s(1-\frac{1}{2^n})}}$

c'est à dire $\mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{s(1-\frac{1}{2^n})}) \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} C([0,T],\mathrm{H}^r)$. D'où :

$$(\mathcal{C}([0,T],\mathrm{L}^2)\cap\mathrm{L}^\infty([0,T],\mathrm{H}^s),\mathrm{L}^\infty\mathrm{H}^{2r-s}) \underset{continue}{\hookrightarrow} (\mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^r),\mathrm{L}^\infty\mathrm{H}^{2r-s}).$$

□

Proposition 3.4 Soit $s \geqslant 4$, $u_0 \in \mathrm{H}^{s+4}$ et $r < s$. $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge dans $\mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^r)$ vers u solution de :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{r+4})\cap\mathcal{C}^1([0,T],\mathrm{H}^{r+1}) \\ u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{5}$$

Démonstration.

— $\forall\epsilon > 0, u^\epsilon \in \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{s+4}) \subset L^\infty([0;T],\mathrm{H}^{s+4})$. Par la proposition 3.3 et le lemme 3.2, $(u^\epsilon)_\epsilon$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{r+4})$ donc converge vers $u \in \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{r+4})$.

— Soit $0 < \epsilon < \epsilon'$:

$$\begin{aligned}||\partial_t u^\epsilon - \partial_t u^{\epsilon'}||_{\mathrm{H}^r} &\leqslant \epsilon||\partial_x^4(u^\epsilon - u^{\epsilon'})||_{\mathrm{H}^r} + (\epsilon'-\epsilon)\,||\partial_x^4 u^{\epsilon'}||_{\mathrm{H}^r} + ||\partial_x^3(u^\epsilon - u^{\epsilon'})||_{\mathrm{H}^r} + \frac{1}{2}||\partial_x\left((u^\epsilon)^2 - (u^{\epsilon'})^2\right)||_{\mathrm{H}^r} \\ &\leqslant (\epsilon'+\epsilon)(||u^\epsilon||_{\mathrm{H}^{r+4}} + ||u^{\epsilon'}||_{\mathrm{H}^{r+4}}) + ||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||_{\mathrm{H}^{r+4}} + \frac{1}{2}||u^\epsilon - u^{\epsilon'}||_{\mathrm{H}^{r+4}}(||u^\epsilon||_{\mathrm{H}^{r+4}} + ||u^{\epsilon'}||_{\mathrm{H}^{r+4}})\end{aligned}$$

Or $(||u^\epsilon||_{\mathrm{H}^{r+4}})_\epsilon$ est de Cauchy donc a une limite finie en $\epsilon \to 0^+$. Ainsi :

$$\lim_{\max(\epsilon,\epsilon')\to 0}||\partial_t u^\epsilon - \partial_t u^{\epsilon'}||_{\mathrm{H}^r} = 0.$$

On en déduit que $\left(\frac{\mathrm{d}u^\epsilon}{\mathrm{d}t}\right)_\epsilon$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^r)$ et converge. De plus, la convergence est uniforme donc $u \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathrm{H}^r)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\dfrac{\mathrm{d}u^\epsilon}{\mathrm{d}t}$.

— De plus u est une solution de (5). En effet en utilisant les deux points précédents :

$$\begin{aligned}||\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - u_{xxx} - uu_x||_{\mathrm{H}^r} &\leqslant ||\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}u^\epsilon}{\mathrm{d}t}||_{\mathrm{H}^r} + ||\epsilon u^\epsilon_{xxxx}||_{\mathrm{H}^r} + ||\partial_x^3(u^\epsilon - u)||_{\mathrm{H}^r} + \frac{1}{2}||\partial_x((u^\epsilon)^2 - u^2)||_{\mathrm{H}^r} \\ &\underset{\epsilon\to 0}{\to} 0.\end{aligned}$$

— Enfin en utilisant l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \partial_x^3 u + \partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right) \in \mathcal{C}([0,T],\mathrm{H}^{r+1})$$

D'où $u \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathrm{H}^{r+1})$

□

On a ainsi prouvé l'existence de u vérifiant l'équation. Il reste à montrer que u a la bonne régularité.

Proposition 3.5 Soit $s' > s \geqslant 4$ et $u_0 \in \mathrm{H}^{s'+4}$. Alors il existe une solution u de (2).

Démonstration. Appliquer la proposition 3.4 avec $r = s$ et $s = s'$. $\square$

En fait, en demandant à la condition initiale une régularité supplémentaire, on obtient la régularité demandée pour u.

On veut maintenant prouver la même chose sans conditions de régularité supplémentaire sur u_0. Soit $s \geqslant 4$ et $u_0 \in \mathrm{H}^{s+4}$. Pour pouvoir appliquer le paragraphe précédent on va régulariser u_0 par convolution.

Définition 3.2 On note pour $\delta > 0$, $u_0^\delta = u_0 * \frac{1}{\delta}\phi(\frac{\cdot}{\delta})$ où $\phi \in \mathcal{S}$ est de moyenne 1 et vérifie : $\forall k > 0, \partial_\xi^k \widehat{\phi}(0) = 0$. On note également u^δ une solution de (2) associée à u_0^δ dont l'existence est assurée par la proposition 3.5. De plus, u^δ est défini sur un intervalle $[0, T]$ indépendant de δ.

Démonstration.

— Ici, la condition initiale est très régulière.
Par exemple $\forall r \geqslant 0, u_0^\delta \in \mathrm{H}^r$. En effet comme $\phi \in \mathcal{S} \subset \mathrm{H}^r$, en notant $\phi_\delta = \frac{1}{\delta}\phi(\frac{\cdot}{\delta})$:

$$||u_0^\delta||_{\mathrm{H}^r} = ||u_0 * \phi_\delta||_{\mathrm{H}^r} = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u_0}(1+\xi^2)^{r/2}\widehat{\phi_\delta}| \,\mathrm{d}x \leqslant ||u_0||_{\mathrm{L}^2}||\phi_\delta||_{\mathrm{H}^r} < \infty.$$

Ainsi par la proposition 3.5, on a que pour u^δ est bien solution de (2)
i.e. $u^\delta \in \mathcal{C}([0,T], \mathrm{H}^{s+4}) \cap \mathcal{C}^1([0,T], \mathrm{H}^s)$

— Par la proposition 3.2, on peut définir u^δ sur un intervalle $[0, \frac{C}{||u_0^\delta||_{\mathrm{H}^s}}]$ avec $C > 0$ indépendant de δ.
Or par Cauchy-Schwartz et changement de variable ($y = \frac{x}{\delta}$) :

$$\|u_0^\delta\|_{\mathrm{H}^s} \leqslant \|u_0\|_{\mathrm{H}^s}\|\phi_\delta\|_{\mathrm{L}^2} = \|u_0\|_{\mathrm{H}^s}\|\phi\|_{\mathrm{L}^2}.$$

On peut donc définir u^δ sur un intervalle indépendant de δ.

$\square$

Remarque 3.1 $u_0 \in \mathrm{H}^s$ suffit pour définir correctement u^δ.

Pour conclure on admet le lemme suivant :

Lemme 3.3 $(u^\delta)_\delta$ converge vers u dans $\mathrm{L}^\infty([0,T], \mathrm{H}^{s+4})$.

Proposition 3.6 u est solution de (2), c'est à dire $u \in \mathcal{C}([0,T], \mathrm{H}^{s+4}) \cap \mathcal{C}^1([0,T], \mathrm{H}^{s+4})$.

Démonstration. Par le lemme 3.3, u est la limite uniforme de fonctions continues sur H^{s+4}.
Donc $u \in \mathcal{C}([0,T], \mathrm{H}^{s+4})$. Enfin $u \in \mathcal{C}^1([0,T], \mathrm{H}^{s+1})$ car $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \partial_x^3 u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) \in \mathcal{C}([0,T], \mathrm{H}^{s+1})$. $\square$

3.3 Unicité des solution de KdV (2)

Proposition 3.7 Soit $u_0 \in \mathrm{H}^{s+4}$, il y a unicité de la solution de (2) avec u_0 comme valeur initiale.

Démonstration. Soit u, v deux solutions de (2) sur $[0, T]$ associées aux valeurs initiales $u_0, v_0 \in \mathrm{H}^{s+4}$. On note $M = 2\max(\sup\limits_{[0,T]} ||u||_{\mathrm{H}^s}, \sup\limits_{[0,T]} ||v||_{\mathrm{H}^s})$. Montrons qu'alors il existe $C > 0$ tel que $||u-v||_{\mathrm{L}^2} \leqslant C||u_0 - v_0||_{\mathrm{L}^2}$.

En utilisant l'équation :

$$\begin{aligned}
\partial_t ||u-v||_{\mathrm{L}^2}^2 &= -2\int_{\mathbb{R}} (u-v)\partial_x^3(u-v)\ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} (u-v)\partial(u^2-v^2)\ \mathrm{d}x \\
&= 0 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (u-v)^2\partial(u+v)\ \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{2}||u-v||_{\mathrm{L}^2}^2(||\partial_x u||_\infty + ||\partial_x v||_\infty)
\end{aligned}$$

Ainsi par la proposition 1.4 on a pour $s > \frac{3}{2}$:

$$\partial_t ||u-v||_{\mathrm{L}^2} \leqslant C||u-v||_{\mathrm{L}^2}(||u||_{\mathrm{H}^s} + ||v||_{\mathrm{H}^s}) \leqslant CM||u-v||_{\mathrm{L}^2}.$$

D'où en intégrant sur $[0, t] \subset [0, T]$:

$$||u-v||_{\mathrm{L}^2}(t) \leqslant ||u_0 - v_0||_{\mathrm{L}^2} + CM\int_0^t ||u-v||_{\mathrm{L}^2}(\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

Par le lemme de Gronwall, on obtient :

$$||u-v||_{\mathrm{L}^2} \leqslant ||u_0 - v_0||e^{CMT}.$$

Ainsi $u_0 = v_0 \Rightarrow u = v$, ce qui assure l'unicité de la solution de (2).

□

CONCLUSION

On a ainsi montré que l'équation KdV (2) admet une unique solution définie sur un intervalle $[0, T]$ avec $T > 0$. L'approche énergétique permet également de montrer la continuité par rapport à la condition initiale. Cependant une approche complémentaire est nécessaire pour montrer que la solution trouvée est définie globalement.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon tuteur Y. Martel qui m'a encadré, orienté, aidé et conseillé dans ce projet.

RÉFÉRENCES

[1] M. B. Erdoğan et N. Tzirakis : The initial value problem for KdV. University of Illinois Urbana-Champaign.

[2] A. Munnier : Espaces de sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles. Université Henri Poincaré, Nancy, 2017. Chapitre 2.

[3] Y. Martel : Evolution equations. École polytechnique, Palaiseau, 2019. Notes des cours MAT554.

[4] https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_de_Korteweg-de_Vries.

[5] F. Linares et G. Ponce : *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. Universitext. Springer New York, 2014.